

EXERCICES SUR LES SERIES

SERIES NUMERIQUES

1. Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

✓ a) $u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \ (n \geq 1)$, ✓ b) $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \ (n \geq 0)$, ✓ c) $u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}} \ (n \geq 2)$

✓ d) $u_n = \ln(1+x^{2^n}) \ (0 < x < 1, n \geq 0)$, e) $u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} \ (n \geq 0)$

2. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série géométrique).

✓ a) $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$, b) $u_n = \frac{\text{ch}(2n)}{\text{ch}(3n)}$, ✓ c) $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$

d) $u_n = \text{th}(n+a) - \text{th } n \ (a \in \mathbb{R})$, e) $u_n = (3 + (-1)^n)^{-n}$, ✓ f) $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}} \ (x \in \mathbb{R})$

3. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Riemann).

✓ a) $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$, ✓ b) $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$, c) $u_n = n^{-1-2/n}$

✓ d) $u_n = e^{\cos(1/n)} - e^{\cos(2/n)}$, ✓ e) $u_n = x^{\ln n} \ (x > 0)$, f) $u_n = n^2 a^{\sqrt{n}} \ (a > 0)$

4. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (règles de Cauchy et de d'Alembert).

✓ a) $u_n = \frac{n!}{a^n} \ (a > 0)$, ✓ b) $u_n = \frac{n!}{n^n}$, ✓ c) $u_n = \frac{a^n}{n^a} \ (a > 0)$, ✓ d) $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n \ (a > 0)$

✓ e) $u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \ (a > 0)$, ✓ f) $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n^2} \ (x \in \mathbb{R})$, ✓ g) $u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$

5. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Bertrand).

✓ a) $u_n = (1 - e^{1/n^2})\sqrt{\ln n}$, ✓ b) $u_n = \frac{1}{\ln n!}$, c) $u_n = n^{n^{-a}} - 1 \ (a > 0)$

6. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

✓ a) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

✓ b) $\frac{(n!)^2}{2n^2}$

✓ c) $\frac{n^2}{n^3 + 1}$

✓ d) $\frac{1}{(\ln n)^n}$

e) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

✓ f) $\frac{1}{\ln(n^2 + n + 1)}$

✓ g) $\frac{n^2}{(1 + \delta)^n} \quad (|\delta| < 1/2)$

✓ h) $\frac{1 + 2 + \dots + n}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$

i) $\frac{a^n + 1}{a^{2n} + n} \quad (a > 0)$

✓ j) $2^{-\sqrt{n}}$
f=O(g) ;

✓ k) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

✓ l) $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}} \quad (a > 0)$

7. Etudier la nature de la série dont le terme général u_n est donné par

$$u_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$$

où f est une fonction de classe C^2 au voisinage de a .

8. Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de \mathbb{R}^3 pour lesquels la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{an + b} - \frac{c}{n}$$

soit convergente.

9. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de \mathbb{R}^2 pour lesquels la série de terme général

$$u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}$$

soit convergente.

10. Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (critères de Leibniz et d'Abel).

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \arctan \frac{1}{n}$, b) $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{a}{n}\right)\pi\right) \quad (a \in \mathbb{R})$, c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} \quad (a \neq 0)$

d) $u_n = \frac{\cos(an + b)}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0 \text{ et } a \neq 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}))$, e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + 2 \sin n}$

f) $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$, g) $u_n = \ln\left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$, h) $u_n = \frac{\sin 2n}{n^2 - n + 1}$

11. Soit $n \geq 1$, λ et μ deux réels. On pose

$$u_n = \lambda(n^{3/2} - (n-1)^{3/2}) + \mu(n^{1/2} - (n-1)^{1/2}) - n^{1/2}.$$

a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

b) En déduire qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = an^{3/2} + bn^{1/2} + c + o(1).$$

12. Soit deux séries positives convergentes de terme généraux u_n et v_n . Quelle est la nature de la série dont le terme général w_n est donné ci-dessous ?

$$a) \quad w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad , \quad b) \quad w_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n} \quad , \quad c) \quad w_n = \frac{u_n}{1 - v_n} \quad , \quad d) \quad w_n = u_n^2$$

13. On pose $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}. \quad (1)$$

b) En déduire que e est irrationnel. (Si $e = a/q$, appliquer la formule (1) avec $n = q$).

14. On pose $u_n = \sin(n! \pi e)$.

a) Quelle est la parité du nombre entier $A_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$?

b) A l'aide de la formule (1) de l'exercice précédant, établir que

$$n! \pi e = \pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

c) En déduire que la série de terme général u_n est semi-convergente.

15. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx$$

est convergente.

16. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré p et q respectivement, avec Q non identiquement nul. Si n n'est pas racine de Q , on pose

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Montrer que

a) la série de terme général u_n converge si et seulement si $q \geq p + 2$,

b) la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge si et seulement si $q \geq p + 1$.

17. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}.$$

18. Soit $\alpha \neq 0$. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}.$$

19. Construire deux séries de termes généraux u_n et v_n , l'une convergente, l'autre divergente, telles que $u_n \sim v_n$.

20. Démontrer la règle de Cauchy : soit $u_n \geq 0$, on suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell,$$

alors, si $0 \leq \ell < 1$ la série de terme général u_n converge. Que se passe-t-il si $\ell > 1$, ou si $\ell = 1$?

21. Etudier la convergence de la série dont le terme général est défini par

$$u_{2p} = \left(\frac{2}{3}\right)^p \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^p$$

par la règle de Cauchy et par la règle de l'Alembert.

22. Soit $u_n > 0$. On pose

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

a) Montrer que les séries de terme généraux u_n et v_n sont de même nature.

b) Comparer la convergence des séries de termes généraux u_n et w_n

23. Soit le polynôme de degré k

$$P_k(X) = X(X-1) \cdots (X-(k-1)).$$

a) Calculer

$$\sigma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{n!}.$$

b) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} = 9e.$$

24. Déterminer un entier n tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 10^5.$$

25. Montrer par le critère de Cauchy que la série de terme général $\frac{\cos \ln n}{n}$ diverge. (*difficile*)

SERIES DE FONCTIONS

26. Etudier la convergence simple, uniforme et normale, des séries de fonctions u_n définies sur $[0, 1]$ dont le terme général est donné ci-dessous.

$$a) \quad u_n(x) = \frac{1}{n + xn^2} \quad , \quad b) \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n \arctan(nx)}{1 + nx} \quad , \quad c) \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + \sqrt{n}}$$

$$d) \quad u_n(x) = x^n(1-x) \quad , \quad e) \quad u_n(x) = (-1)^n x^n(1-x) \quad , \quad f) \quad u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

27. Lorsque $a > 0$, $n \geq 0$ et $x \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = x^a e^{-nx}.$$

a) Calculer la somme de la série de terme général $f_n(x)$.

b) Montrer que l'on a convergence normale si $a > 1$.

c) Montrer que l'on n'a pas convergence uniforme si $a \leq 1$.

d) Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[s, +\infty[$, où $s > 0$.

28. Soit u_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2x + n^3}.$$

Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f indéfiniment dérivable.

29. Pour $x \geq 0$ on pose

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(x+n)}{x+n}.$$

Montrer que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

30. Pour tout x réel on pose

$$u_n(x) = -2n^2xe^{-n^2x^2}.$$

a) Montrer que la série de terme général

$$v_n(x) = u_n(x) - u_{n+1}(x)$$

converge et calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x).$$

b) Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme général

$$w_n = \int_0^a v_n(t) dt$$

converge et calculer sa somme.

c) Calculer $\int_0^a S(t) dt$.

d) En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$.

Corrigé

1. a) On utilise le procédé télescopique en écrivant

$$u_n = \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2}.$$

Si l'on pose, pour $n \geq 1$,

$$v_n = \ln \frac{n}{n+1},$$

on a

$$u_n = v_n - v_{n+1}.$$

Alors

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{N+1},$$

et puisque la suite (v_n) admet 0 comme limite, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_1 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2.$$

b) On commence par décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On a

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$

Alors

$$a = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)f(x) = -1, \quad c = \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)f(x) = \frac{1}{2},$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+3)}.$$

Pour calculer la somme, on peut utiliser deux méthodes.

Première méthode : le procédé télescopique. On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right),$$

et donc, si l'on pose, pour $n \geq 0$,

$$v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),$$

on a

$$u_n = v_n - v_{n+1},$$

et puisque la suite (v_n) converge vers 0, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = v_0 = \frac{1}{4}.$$

Deuxième méthode : calcul des sommes partielles. On a

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+3}.$$

En posant $n' = n - 1$ dans la première somme du membre de droite et $n'' = n + 1$ dans la troisième, on obtient

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n'=-1}^{N-1} \frac{1}{n'+2} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{n''=1}^{N+1} \frac{1}{n''+2},$$

où encore, puisque les indices n' et n'' sont muets,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{N-1} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n+2}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{N+2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} \right). \end{aligned}$$

La somme se simplifie, et il reste

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} \right),$$

et lorsque N tend vers l'infini, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

c) On peut écrire

$$u_n = 9 \left(\frac{3}{7} \right)^{n-2},$$

et on a une série géométrique, donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = 9 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^{n-2} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^n = \frac{9}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{63}{4}.$$

d) Si l'on calcule les premières sommes partielles, on obtient

$$S_0 = \ln(1+x) = \ln \frac{1-x^2}{1-x},$$

$$S_1 = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln \frac{1-x^4}{1-x},$$

$$S_3 = S_2 + \ln(1+x^4) = \ln \frac{(1-x^4)(1+x^4)}{1-x} = \ln \frac{1-x^8}{1-x}.$$

Il semble que l'on obtienne la formule

$$S_n = \ln \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

ce que l'on démontre par récurrence.

Si la propriété est vraie à l'ordre n , alors

$$S_{n+1} = S_n + \ln(1+x^{2^{n+1}}) = \ln \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} + \ln(1+x^{2^{n+1}}) = \ln \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}{1-x} = \ln \frac{1-x^{2 \times 2^{n+1}}}{1-x},$$

ce qui donne la propriété à l'ordre $n+1$:

$$S_{n+1} = \ln \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}.$$

Alors, comme $0 < x < 1$, la suite $(x^{2^{n+1}})$ converge vers 0, et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x).$$

e) On décompose la fraction en éléments simples ce qui donne

$$\frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4},$$

et donc, si l'on pose, pour $n \geq 0$,

$$v_n = \frac{1}{3n+1},$$

on a

$$u_n = v_n - v_{n+1},$$

et puisque la suite (v_n) converge vers 0, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = v_0 = 1.$$

2. a) On obtient facilement un équivalent

$$u_n = \frac{3^n}{5^n} \frac{1 + \frac{n^4}{3^n}}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Or la série de terme général $(3/5)^n$ est une série géométrique positive de raison $3/5 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

b) On écrit

$$u_n = \frac{e^{2n} + e^{-2n}}{e^{3n} + e^{-3n}} = \frac{e^{2n}}{e^{3n}} \frac{1 + e^{-4n}}{1 + e^{-6n}} \sim \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Or la série de terme général $(1/e)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/e < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

c) On écrit

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Mais

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right],$$

et en utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1 + u)$, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp \left[n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] = e^{1+o(1)} \sim e,$$

donc

$$u_n \sim e \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or la série de terme général $(1/2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

d) Si $a = 0$, on a $u_n = 0$, et la série converge. Supposons donc $a \neq 0$. En sachant que

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

on obtient

$$u_n = \frac{e^{2n+2a} - 1}{e^{2n+2a} + 1} - \frac{e^{2n} - 1}{e^{2n} + 1},$$

d'où l'on tire

$$u_n = \frac{2e^{2n+2a} - 2e^{2n}}{(e^{2n+2a} + 1)(e^{2n} + 1)}.$$

On en déduit l'équivalent

$$u_n \sim \frac{2e^{2n}(e^{2a} - 1)}{e^{2n+2a}e^{2n}} = \frac{2(1 - e^{-2a})}{e^{2n}} = 2(1 - e^{-2a}) \left(\frac{1}{e^2}\right)^n.$$

Or la série de terme général $(1/e^2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/e^2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

e) On a

$$0 \leq u_n = \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or la série de terme général $(1/2)^n$ est une série géométrique de raison $1/2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

f) Si $|x| > 1$, on a

$$u_n \sim \left(\frac{1}{x^2}\right)^n.$$

Or la série de terme général $(1/x^2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/x^2 < 1$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

Si $|x| < 1$, la suite (u_n) converge vers 1, et si $|x| = 1$ elle converge vers 1/2. Dans les deux cas la limite de la suite (u_n) n'est pas nulle, et la série de terme général u_n diverge.

3. a) En utilisant le développement limité de $\cos u$ en 0, on obtient

$$u_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Or $1/2n^2$ est le terme général d'une série de Riemann positive convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

b) On peut écrire

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1.$$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0, on obtient

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1.$$

Alors, en utilisant le développement limité de e^u en 0, on en déduit

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \sim -\frac{1}{n^2}.$$

Or $-1/n^2$ est le terme général d'une série de Riemann négative convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

c) On écrit

$$u_n = \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{2 \ln n}{n}\right).$$

Mais la suite $(\ln n/n)$ converge vers 0, donc la suite $(\exp(-\frac{2 \ln n}{n}))$ converge vers 1. Alors

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Or $1/n$ est le terme général d'une série de Riemann positive divergente. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge aussi.

d) En utilisant le développement limité de $\cos u$ en 0, on obtient

$$u_n = \exp\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(1 - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On met e en facteur, ce qui donne

$$u_n = e \left(\exp \left(-\frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \exp \left(-\frac{4}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right),$$

et en utilisant le développement limité en 0 de e^u , on trouve

$$u_n = e \left[\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(1 - \frac{2}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right] = e \left(\frac{3}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \sim \frac{3e}{2n^2}.$$

Or $3e/(2n^2)$ est le terme général d'une série de Riemann positive convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

e) On a

$$u_n = e^{\ln n \ln x} = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

La série de terme général u_n est une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $-\ln x > 1$, c'est-à-dire $x < 1/e$.

f) Lorsque $a \geq 1$, la suite (u_n) ne converge pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge.

Lorsque $0 < a < 1$, la suite $(n^2 u_n) = (n^4 a^{\sqrt{n}})$ converge vers 0 (produit d'une exponentielle et d'une puissance), donc à partir d'un certain rang, on a

$$n^2 u_n \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2},$$

et puisque la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

4. Dans cet exercice toutes les séries sont positives à partir d'un certain rang.

a) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a}.$$

La suite (u_{n+1}/u_n) admet $+\infty$ comme limite, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) diverge.

b) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n}.$$

Par un calcul standard on obtient que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $e^{-1} < 1$, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) converge.

c) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^a} \frac{n^a}{a^n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^a.$$

La suite (u_{n+1}/u_n) converge vers a , donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) converge si $0 \leq a < 1$, et diverge si $a > 1$. Il reste à étudier le cas $a = 1$. Dans ce cas

$$u_n = \frac{1}{n},$$

et l'on obtient la série harmonique qui diverge donc.

d) On a

$$\sqrt[n]{u_n} = a + \frac{1}{n},$$

et la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers a , donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général (u_n) converge si $0 \leq a < 1$, et diverge si $a > 1$. Il reste à étudier le cas $a = 1$. Dans ce cas

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

et la suite u_n converge vers $e \neq 0$, donc la série de terme général u_n diverge.

e) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(1+a) \cdots (1+a^{n+1})} \frac{(1+a) \cdots (1+a^n)}{a^n} = \frac{a}{(1+a^{n+1})}.$$

- Si $0 < a < 1$, la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers a .
- Si $a = 1$, la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers $1/2$.
- Si $a > 1$, la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers 0 .

Dans tous les cas la limite est strictement plus petite que 1, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général (u_n) converge.

f) On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n},$$

et la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers e^{-x} , donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général (u_n) converge si $e^{-x} < 1$, c'est-à-dire si $x > 0$, et diverge si $e^{-x} > 1$, c'est-à-dire si $x < 0$. Il reste à étudier le cas $x = 0$. Dans ce cas $u_n = 1$ et la suite u_n ne converge pas vers 0, donc la série de terme général u_n diverge.

g) On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

et la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $0 < 1$, donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général (u_n) converge.

5. a) En utilisant le développement limité de e^u en 0, on a immédiatement

$$u_n = \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] (\ln n)^{1/2} \sim -\frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1/2}}.$$

Or $-\frac{1}{n^2(\ln n)^{-1/2}}$ est le terme général d'une série de Bertrand négative convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

b) On a, si $n \geq 2$,

$$n! = n(n-1) \cdots 1 \leq n \times n \cdots \times n = n^n,$$

soit

$$\ln n! \leq n \ln n,$$

et finalement

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n} > 0.$$

Or $\frac{1}{n \ln n}$ est le terme général d'une série de Bertrand divergente. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge aussi.

c) On a

$$u_n = \exp(n^{-a} \ln n) - 1.$$

La suite $(n^{-a} \ln n)$ converge vers 0, donc on peut utiliser le développement de e^u en 0.

$$u_n = (1 + n^{-a} \ln n + o(n^{-a} \ln n)) - 1 \sim n^{-a} \ln n = \frac{1}{n^a (\ln n)^{-1}}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n^a (\ln n)^{-1}}$ est une série de Bertrand qui converge si $a > 1$, et qui diverge si $0 < a < 1$. Lorsque $a = 1$, elle diverge également. La série de terme général u_n possède les mêmes propriétés.

6. Remarquons que toutes les séries de cet exercice sont positives.

a) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}.$$

et en simplifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1.$$

La série de terme général u_n converge donc d'après la règle de d'Alembert.

b) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^2 \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}.$$

et en simplifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2 \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

La série de terme général u_n converge donc d'après la règle de d'Alembert.

c) On a

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Comme la série de terme général $1/n$ diverge, la série de terme général u_n diverge également.

d) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln n)^n}{(\ln(n+1))^{n+1}} = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^n \frac{1}{\ln(n+1)},$$

donc

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{\ln(n+1)},$$

et il résulte du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

La série de terme général u_n converge donc d'après la règle de d'Alembert.

e) On a

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln \ln n} = n^{\ln \ln n}.$$

Comme $\ln \ln n$ tend vers $+\infty$, on a, à partir d'un certain rang

$$\ln \ln n \geq 2,$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

f) On a

$$\ln(n^2 + n + 1) = 2 \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right),$$

et

$$\frac{\ln(n^2 + n + 1)}{2 \ln n} = 1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{2 \ln n}.$$

Comme cette expression converge vers 1, on en déduit que

$$u_n \sim \frac{1}{2 \ln n}.$$

Mais, on a quel que soit $x > 0$,

$$\ln x \leq x,$$

donc

$$\frac{1}{2 \ln n} \geq \frac{1}{2n},$$

et comme la série de terme général $1/(2n)$ diverge, il en est de même de celle de terme général $1/(2 \ln n)$ puis de celle de terme général u_n .

g) Formons u_{n+1}/u_n . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(1+\delta)^{n+1}} \frac{(1+\delta)^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{1+\delta}.$$

Cette expression converge vers $1/(1+\delta)$. On a alors les trois cas suivants :

- si $-1/2 < \delta < 0$, on a $1/2 < \delta+1 < 1$, donc $1/(1+\delta) > 1$ et la série de terme général u_n diverge,
- si $0 < \delta < 1/2$ on a $\delta+1 > 1$, donc $1/(1+\delta) < 1$ et la série de terme général u_n converge,
- si $\delta = 0$, on a $u_n = n^2$. Le terme général ne tend pas vers zéro, et la série de terme général u_n diverge.

h) Si l'on connaît les sommes

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on obtient immédiatement

$$u_n = \frac{3}{2n+1} \sim \frac{3}{2n},$$

et la série de terme général u_n diverge.

Si l'on ne connaît pas les sommes précédentes, on peut utiliser les sommes de Riemann. En effet

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = n^{p+1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \right] \sim n^{p+1} \int_0^1 x^p dx = \frac{n^{p+1}}{p+1},$$

donc

$$u_n \sim \frac{n^2}{2} \frac{3}{n^3} = \frac{3}{2n}.$$

i) On obtient facilement un équivalent de u_n .

Si $a > 1$,

$$u_n = \frac{a^n}{a^{2n}} \frac{1 + a^{-n}}{1 + na^{-2n}} \sim \frac{1}{a^n}.$$

Or la série géométrique positive de raison $1/a < 1$ converge, donc la série de terme général u_n converge également.

Si $a = 1$,

$$u_n = \frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n}.$$

Or la série harmonique positive de terme général $2/n$ diverge, donc la série de terme général u_n diverge également.

Si $0 < a < 1$,

$$u_n = \frac{1}{n} \frac{1 + a^n}{1 + \frac{a^{2n}}{n}} \sim \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique positive de terme général $1/n$ diverge, donc la série de terme général u_n diverge également.

j) Comme la suite $(n^2 2^{-\sqrt{n}})$ converge vers 0, on a, à partir d'un certain rang

$$n^2 2^{-\sqrt{n}} \leq 1,$$

donc

$$2^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série de terme général $1/n^2$ converge. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

k) On a immédiatement l'équivalent

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comme la série de terme général $1/n^{3/2}$ converge, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

l) On peut effectuer un développement limité. Tout d'abord

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{a}{n}},$$

donc

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n+a}} &= 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Comme

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

On a finalement

$$u_n = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{a}{n^2},$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

On aurait pu également utiliser le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in [1/n, 1/(n+1)]$, donc dans $[0, 1]$, tel que

$$u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right) e^{c_n},$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{a}{n(n+a)} e \leq \frac{ea}{n^2},$$

et l'on conclut avec le théorème de comparaison.

7. En utilisant la formule de Taylor-Young, on a les développements limités

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f(a) + \frac{f'(a)}{n} + \frac{f''(a)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et

$$f\left(a - \frac{1}{n}\right) = f(a) - \frac{f'(a)}{n} + \frac{f''(a)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc

$$u_n = \frac{f''(a)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la suite $(n^2 u_n)$ converge vers $f''(a)$, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|n^2 u_n - f''(a)| \leq 1.$$

Alors

$$|n^2 u_n| \leq 1 + |f''(a)|,$$

et donc

$$|u_n| \leq \frac{1 + |f''(a)|}{n^2}.$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, la série de terme général u_n converge absolument, donc converge.

On peut dire également que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

8. On suppose que a et b ne sont pas nuls simultanément. On a

$$u_n = \frac{n(1-ac) - bc}{n(an+b)}.$$

Si $ac \neq 1$, ou bien $a \neq 0$ et $u_n \sim \frac{1-ac}{an}$, ou bien $a = 0$ (donc $b \neq 0$) et $u_n \sim \frac{1}{b}$. Dans les deux cas la série diverge.

Si $ac = 1$ (donc $a \neq 0$), on a $u_n \sim -\frac{bc}{an^2}$. Dans ce cas la série converge.

L'ensemble des triplets (a, b, c) pour lesquels la série converge est donc $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ac = 1\}$.

9. Donnons les équivalents de u_n sous forme de tableau. Le résultat dépend de la position de a et b par rapport à 2. Les équivalents sont des suites géométriques.

	$a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$b < 2$	1	2	$\left(\frac{a}{2}\right)^n$
$b = 2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^n$
$b > 2$	$\left(\frac{2}{b}\right)^n$	$2 \left(\frac{2}{b}\right)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$

Le tableau suivant donne la nature de la série de terme général u_n .

	$a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$b < 2$	DV	DV	DV
$b = 2$	DV	DV	DV
$b > 2$	CV	CV	$\frac{a \geq b}{a < b} \begin{matrix} \text{DV} \\ \text{CV} \end{matrix}$

En résumé l'ensemble des couples (a, b) pour lesquels la série converge est

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > 2, 0 < a < b\}.$$

10. a) On a

$$|u_n| = \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}.$$

Puisque l'on a au voisinage de 0,

$$\arctan u \sim u,$$

on en déduit que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument, donc

converge.

b) On a

$$u_n = (-1)^n \sin \frac{a\pi}{n}.$$

Si $a = 0$, on a $u_n = 0$ et la série de terme général u_n converge (absolument).

Remarquons que si l'on change a en $-a$ dans l'expression de u_n , le signe de u_n change, donc le comportement de la série ne changera pas. On peut se contenter d'étudier le cas $a > 0$. Alors

$$|u_n| = \left| \sin \frac{a\pi}{n} \right|.$$

Puisque l'on a au voisinage de 0,

$$\sin u \sim u,$$

on en déduit que

$$|u_n| \sim \frac{a\pi}{n}.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n$ diverge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ diverge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n ne converge pas absolument.

Posons

$$f(x) = \sin(a\pi x).$$

On a

$$f'(x) = a\pi \cos(a\pi x).$$

et $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[0, 1/2a]$, donc la suite $(\sin \frac{a\pi}{n})$ est décroissante dès que $n > 2a$. De plus elle converge vers 0. Alors il résulte du critère de Leibniz que la série de terme général u_n converge. Elle est donc semi-convergente.

c) Rappelons que le produit de la suite $((-1)^n)$ qui est bornée, par une suite qui converge vers zéro, converge également vers zéro.

Si $a < 0$, on a

$$u_n = \frac{1}{1 + (-1)^n n^a},$$

et puisque la suite $((-1)^n n^a)$ converge vers 0, la suite (u_n) converge vers 1, donc la série de terme général u_n diverge.

Si $a > 0$, on a, si $n \geq 2$,

$$|u_n| = \frac{1}{n^a + (-1)^n} = \frac{1}{n^a} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}},$$

et puisque la suite $((-1)^n/n)$ converge vers 0, on en déduit que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^a}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument, si et seulement si $a > 1$.

Etudions le cas où $0 < a \leq 1$. On écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}}.$$

Comme la suite $((-1)^n/n^a)$ converge vers 0, on peut utiliser un développement limité de $1/(1+u)$ en 0, et on obtient

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

Posons

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz. Par ailleurs

$$w_n \sim -\frac{1}{n^{2a}}.$$

Or la série de terme général $-1/n^{2a}$ est une série de Riemann négative qui converge si et seulement si $2a > 1$ c'est-à-dire $a > 1/2$, donc la série de terme général w_n converge si et seulement si $a > 1/2$. On a alors les deux cas suivants :

si $1/2 < a \leq 1$, la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge mais n'est pas absolument convergente : elle est semi-convergente.

si $0 < a \leq 1/2$, la série de terme général u_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente : elle diverge donc.

d) Si l'on pose

$$w_n = \cos(an + b) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

on voit déjà que la suite (v_n) décroît et converge vers 0, si $\alpha > 0$.

Pour calculer la somme $w_n + \dots + w_m$, on considère w_n comme la partie réelle de $e^{i(an+b)}$, et l'on calcule

$$e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \dots + e^{i(am+b)} = e^{i(an+b)} \left(1 + e^{ia} + \dots + e^{i(m-n)a} \right).$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{ia} . Cette raison n'est pas égale à 1, puisque $a \neq 2k\pi$, donc

$$1 + e^{ia} + \dots + e^{i(m-n)a} = \frac{1 - e^{i(m-n+1)a}}{1 - e^{ia}},$$

d'où

$$|e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \dots + e^{i(am+b)}| = \frac{|1 - e^{i(m-n+1)a}|}{|1 - e^{ia}|}.$$

Mais

$$|1 - e^{i(m-n+1)a}| \leq 1 + |e^{i(m-n+1)a}| = 2,$$

donc

$$|e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \dots + e^{i(am+b)}| \leq \frac{2}{|1 - e^{ia}|} = M.$$

Alors, puisque la valeur absolue de la partie réelle d'un nombre complexe est inférieure à son module, on obtient

$$|w_n + \dots + w_m| \leq |e^{i(an+b)} + e^{i(a(n+1)+b)} + \dots + e^{i(am+b)}|,$$

et finalement

$$|w_n + \dots + w_m| \leq M.$$

On peut donc appliquer le critère d'Abel et la série de terme général $v_n w_n$ converge.

Etudions maintenant la convergence absolue.

Si $\alpha > 1$, on a en fait

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

et la convergence est absolue.

Dans le cas où $0 < \alpha \leq 1$, on écrit

$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha} \geq \frac{\cos^2(an+b)}{n^\alpha} = \frac{1 + \cos(2an+2b)}{2n^\alpha}.$$

Si $a \neq k\pi$, la série de terme général $\cos(2an+2b)/n^\alpha$ converge, et la série dont le terme général est le membre de droite, est la somme d'une série divergente positive $1/n^\alpha$ et d'une série convergente. La suite des sommes partielles a pour limite $+\infty$. Alors il en est de même de la suite des sommes partielles de la série dont le terme général est le membre de gauche.

Si $a = k\pi$,

$$\frac{|\cos(an+b)|}{n^\alpha} = \frac{|\cos b|}{n^\alpha},$$

et la série diverge également.

En résumé, si $0 < \alpha \leq 1$, la série de terme général u_n est semi-convergente.

e) On a, si $n \geq 2$,

$$|u_n| = \frac{1}{n + 2 \sin n} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{2 \sin n}{n}},$$

et puisque la suite $(2 \sin n)$ est bornée et que la suite $(1/n)$ converge vers 0, la suite $(\sin n/n)$ converge aussi vers 0, donc

$$|u_n| \sim \frac{1}{n},$$

et la série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique. La série de terme général u_n n'est donc pas absolument convergente.

Partons de l'égalité

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{2 \sin n}{n}}.$$

Comme la suite $(\sin n/n)$ converge vers 0, on peut utiliser un développement limité de $1/(1+u)$ en 0, et on obtient

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{2 \sin n}{n} + o\left(\frac{2 \sin n}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2}\right).$$

Posons

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz. Par ailleurs

$$w_n \sim -\frac{2(-1)^n \sin n}{n^2},$$

donc

$$|w_n| \sim \frac{2|\sin n|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2},$$

et la série de terme général $|w_n|$ converge par comparaison à la série de Riemann de terme général $2/n^2$. Il en résulte que la série de terme général w_n converge. Alors la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge donc et c'est une série semi-convergente.

f) On a aussi

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1} + n},$$

et donc

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \sim \frac{1}{2n}.$$

La série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique.

Mais la suite $1/(\sqrt{n^2 + 1} + n)$ est une suite décroissante qui converge vers 0, donc la série de terme général u_n converge d'après le critère de Leibniz. Il en résulte que cette série est semi-convergente.

g) Puisque la suite $(\cos n)$ est bornée, et que la suite $(1/\sqrt{n})$ converge vers 0, la suite $(\cos n/\sqrt{n})$ converge vers 0, et on peut utiliser un développement limité de $\ln(1+u)$ en 0.

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{2n} + o\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right).$$

Posons

$$v_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{\cos^2 n}{2n} + o\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right).$$

La série de terme général v_n converge. D'autre part

$$w_n \sim -\frac{\cos^2 n}{2n} = -\left(\frac{1}{4n} + \frac{\cos 2n}{4n}\right).$$

Or la série de terme général $1/(4n)$ diverge, et la série de terme général $\cos(2n)/(4n)$ converge d'après d), donc la série de terme général w_n diverge. Alors la série de terme général u_n diverge, donc elle ne converge pas absolument.

h) On a

$$|u_n| \leq \frac{|\sin 2n|}{n^2 - n + 1} \leq \frac{1}{n^2 - n + 1} \sim \frac{1}{n^2},$$

donc la série de terme général u_n converge absolument par comparaison à la série de Riemann de terme général $1/n^2$.

11. a) On peut écrire en mettant $n^{3/2}$ en facteur,

$$u_n = n^{3/2} \left[\lambda \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{3/2} \right) + \frac{\mu}{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1/2} \right) - \frac{1}{n} \right].$$

On fait un développement limité à l'ordre 3 de $n^{-3/2}u_n$ par rapport à la variable $1/n$. On a

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{3/2} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3} \right),$$

et

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right),$$

d'où, en remplaçant

$$n^{-3/2}u_n = \left(\frac{3}{2} \lambda - 1 \right) \frac{1}{n} + \left(-\frac{3}{8} \lambda + \frac{1}{2} \mu \right) \frac{1}{n^2} + \left(-\frac{1}{16} \lambda + \frac{1}{8} \mu \right) \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3} \right).$$

Si $\lambda \neq 2/3$, on a

$$u_n \sim \left(\frac{3}{2} \lambda - 1 \right) \sqrt{n},$$

et la série de terme général u_n diverge puisque le terme général ne tend pas vers 0.

Si $\lambda = 2/3$ et $\mu \neq 1/2$, on a

$$u_n \sim \left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et la série de terme général u_n diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.

Si $\lambda = 2/3$ et $\mu = 1/2$, on a

$$u_n \sim \frac{1}{48} \frac{1}{n^{3/2}},$$

et la série de terme général u_n converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

b) Dans ce dernier cas, notons S la somme de la série et R_n le reste d'ordre n . On a donc

$$\sum_{k=1}^n u_k = S - R_n,$$

et la suite (R_n) converge vers 0.

En calculant les sommes partielles, on obtient, en utilisant le procédé télescopique,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} n^{1/2} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} n^{1/2} - (S - R_n),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} n^{1/2} - S + o(1),$$

ce qui donne la formule voulue.

12. a) De l'inégalité

$$u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n = (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0,$$

on déduit

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2} (u_n + v_n).$$

Puisque la série de terme général $u_n + v_n$ converge comme somme de deux séries convergentes, on en déduit que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.

b) En appliquant ce qui précède à $v_n = 1/n^2$, qui est le terme général d'une série convergente, on en déduit que la série de terme général $\sqrt{u_n}/n$ converge.

c) Puisque la série de terme général v_n converge, la suite (v_n) converge vers 0, et donc $w_n \sim u_n$. Il en résulte que la série de terme général w_n converge.

d) Puisque la série de terme général u_n converge, la suite (u_n) converge vers 0, et donc à partir d'un certain rang $u_n \leq 1$. Il en résulte $u_n^2 \leq u_n$ et la série de terme général w_n converge.

13. a) On a

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

D'autre part

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots k}.$$

Mais, si $k \geq n+2$, on a $k > n+1$, et

$$(n+1) \cdots k > (n+1) \cdots (n+1) = (n+1)^{k-n},$$

puisque'il y a $k - n$ facteurs dans ce produit, donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}}.$$

Mais on reconnaît alors la somme de la série géométrique de raison $1/(n+1)$.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}.$$

Finalement

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n}.$$

On a donc bien obtenu les inégalités

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

b) Tout d'abord, en prenant $n = 1$ dans (1), on trouve

$$2 < e < 3,$$

et e n'est donc pas entier. Supposons que e soit rationnel. Il s'écrirait $e = a/q$ avec $a > 0$ et $q > 1$ entiers. Alors

$$\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{a}{q} < \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \cdot q!}.$$

En multipliant ces inégalités par $q!$ on obtient

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < a(q-1)! < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q}.$$

Mais

$$\alpha = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{q-1} (k+1) \cdots q,$$

est un nombre entier. Alors

$$0 < a(q-1)! - \alpha < \frac{1}{q} < 1,$$

et $a(q-1)! - \alpha$ serait un entier de l'intervalle $]0, 1[$ ce qui est impossible. On a donc une contradiction et e est irrationnel.

14. a) On écrit

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \cdots (n-1)n + n + 1.$$

La somme $\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \cdots (n-1)n$ est divisible par le produit $(n-1)n$ qui est un nombre pair, donc A_n a la même parité que $n+1$. Il en résulte que A_n est pair si n est impair, et impair si n est pair.

b) En multipliant les inégalités (1) par $\pi n!$, on trouve

$$\pi A_n < n! \pi e < \pi A_n + \frac{\pi}{n},$$

donc

$$0 < n! \pi e - \pi A_n < \frac{\pi}{n}.$$

D'autre part

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2},$$

donc

$$0 < n! \pi e - \pi A_n < \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n^2}.$$

On en déduit que

$$n! \pi e = \pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

c) Alors

$$u_n = \sin(n! \pi e) = \sin\left(\pi A_n + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Tout d'abord

$$|u_n| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right| \sim \frac{\pi}{n},$$

et cette série ne converge pas, donc u_n n'est pas absolument convergente.

D'autre part, d'après la formule des accroissements finis, il existe c tel que

$$|\sin(a+b) - \sin a| = |b| |\cos c| \leq |b|,$$

donc

$$\sin(a+b) = \sin a + O(b).$$

Alors

$$\sin\left(\frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$u_n = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument. D'autre part la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ est décroissante et converge vers 0. La série alternée de terme général $(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge. Elle est bien semi-convergente.

15. On a

$$\sum_{k=0}^m u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^m (1 - \sqrt{x})^k dx.$$

Mais, si $x \neq 0$,

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^m (1 - \sqrt{x})^k \right) dx = \int_0^1 \frac{1 - (1 - \sqrt{x})^{m+1}}{1 - (1 - \sqrt{x})} dx = \int_0^1 \frac{1 - (1 - \sqrt{x})^{m+1}}{\sqrt{x}} dx.$$

En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on a $du = dx/(2\sqrt{x})$, et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m u_k &= \int_0^1 (1 - (1 - u)^{m+1}) 2du \\ &= 2 \left[u + \frac{(1 - u)^{m+2}}{m+2} \right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{2}{m+2}. \end{aligned}$$

Comme cette suite converge vers 2, on en déduit que la série de terme général u_n converge, et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m u_k = 2.$$

16. *Cas réel.*

Montrons tout d'abord les propriétés dans le cas où P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$.

a) Si $a_p X^p$ est le terme de plus haut degré de P et $b_q X^q$ celui de Q , on a alors

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}},$$

et il résulte du critère de Riemann que cette série converge si et seulement si $q - p \geq 2$.

b) Pour que la série converge, il faut déjà que le terme général tende vers 0. Or

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}},$$

et cette expression tend vers zéro si et seulement si $q > p$, soit $q \geq p + 1$, donc, pour que la série converge, il faut que $q \geq p + 1$.

Supposons maintenant cette condition satisfaite. Calculons la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On a

$$f'(x) = \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}.$$

Le numérateur est un polynôme. Si ce n'est pas le polynôme 0, il est équivalent à son terme de plus haut degré et donc de signe constant pour x assez grand. Il en résulte que f est monotone sur un intervalle $[a, +\infty[$, et donc que la suite (u_n) est monotone à partir d'un certain rang. Le critère des séries alternées montre que la série de terme général (u_n) converge.

Si le numérateur de la fraction est le polynôme zéro, c'est que f est constante, donc que $P(x) = \lambda Q(x)$. Mais comme $q \geq p + 1$, on ne peut avoir $q = p$, ce qui implique que $\lambda = 0$, donc $P = 0$, et alors la série est nulle et converge également.

La condition $q \geq p + 1$ est donc suffisante pour avoir la convergence.

Cas complexe.

Si l'on suppose maintenant les polynômes à coefficients complexes, on peut écrire

$$P = P_1 + iP_2 \quad \text{et} \quad Q = Q_1 + iQ_2,$$

avec P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}[X]$. Un des polynômes P_1 et P_2 au moins est de degré p , et un des polynômes Q_1 et Q_2 au moins est de degré q . Alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1 + iP_2}{Q_1 + iQ_2},$$

et, en rendant le dénominateur réel,

$$\frac{P}{Q} = \frac{(P_1 + iP_2)(Q_1 - iQ_2)}{Q_1^2 + Q_2^2} = \frac{P_1Q_1 + P_2Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} + i \frac{P_2Q_1 - P_1Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}.$$

Un au moins des polynômes Q_1 et Q_2 est de degré q . Alors le degré du dénominateur $C = Q_1^2 + Q_2^2$ vaut au plus $2q$, mais les termes de plus haut degré de Q_1^2 et Q_2^2 étant positifs, le degré de C vaut exactement $2q$.

Les polynômes $P_1Q_1 + P_2Q_2$ et $P_2Q_1 - P_1Q_2$ sont de degré $p + q$ au plus, et un des deux au moins est exactement de degré $p + q$, sinon la fraction P/Q serait de degré plus petit que $(p + q) - 2q = p - q$ ce qui est faux.

Cela signifie que un au moins des polynômes $A = P_1Q_1 + P_2Q_2$ et $B = P_2Q_1 - P_1Q_2$ est de degré $p + q$, et l'autre de degré au plus $p + q$. On peut alors appliquer les résultats obtenus dans le cas réel.

a) si $q \geq p + 2$, alors $2q \geq p + q + 2$, donc les séries de termes généraux $\frac{A(n)}{C(n)}$ et $\frac{B(n)}{C(n)}$ convergent toutes les deux. Alors la série de terme général u_n converge.

Si $q < p + 2$, alors $2q < p + q + 2$, donc une des deux séries de termes généraux $\frac{A(n)}{C(n)}$ et $\frac{B(n)}{C(n)}$ diverge. Alors la série de terme général u_n diverge.

b) si $q \geq p + 1$, alors $2q \geq p + q + 1$, donc les séries de termes généraux $(-1)^n \frac{A(n)}{C(n)}$ et $(-1)^n \frac{B(n)}{C(n)}$ convergent toutes les deux. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Si $q < p + 1$, alors $2q < p + q + 1$, donc une des deux séries de termes généraux $(-1)^n \frac{A(n)}{C(n)}$ et $(-1)^n \frac{B(n)}{C(n)}$ diverge. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ diverge.

17. On peut appliquer le critère des séries alternées, puisque la suite $(1/(3n + 1))$ décroît et tend vers 0. La série converge donc.

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient

$$\frac{1}{1 + x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{3k} + \frac{(-1)^n x^{3n}}{1 + x^3},$$

donc en intégrant

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3k + 1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1 + x^3} dx.$$

En appliquant la première formule de la moyenne, il existe c_n dans $[0, 1]$ tel que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1 + x^3} dx = \frac{1}{1 + c_n^3} \int_0^1 x^{3n} dx = \frac{1}{1 + c_n^3} \frac{1}{1 + 3n} \leq \frac{1}{1 + 3n}.$$

Il résulte du théorème d'encadrement que la suite de terme général $\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1 + x^3} dx$ converge et a pour limite 0. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1 + x^3} dx = 0,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}.$$

18. On étudie différents cas.

Si $\alpha < 0$, alors

$$|u_n| = \frac{1}{|1 + (-1)^{n+1}n^\alpha|},$$

et cette expression tend vers 1. Le terme général de la série ne tend pas vers zéro et la série diverge.

Si $\alpha > 0$, on a cette fois

$$|u_n| = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}} \sim \frac{1}{n^\alpha},$$

La série converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $0 < \alpha \leq 1$. En utilisant le développement limité en zéro

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u),$$

on a

$$\frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right) \right),$$

d'où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \left[\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right].$$

On a donc $u_n = v_n + w_n$, où

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

La série de terme général v_n est alternée et converge donc.

Par ailleurs

$$w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

et d'après le critère de Riemann, la série de terme général w_n converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

Alors, il en sera de même de la série de terme général u_n . En résumé on a la situation suivante :

- convergence absolue si $\alpha > 1$,
- semi-convergence si $1 \geq \alpha > 1/2$,
- divergence si $\alpha \leq 1/2$.

19. Il suffit de prendre

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Alors

$$u_n = v_n + v_n^2 = v_n(1 + v_n),$$

et comme v_n tend vers 0, on a $u_n \sim v_n$.

La série de terme général v_n est alternée et converge. La série de terme général u_n est somme d'une série alternée et d'une série divergente, donc diverge.

20. Supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers $\ell \in [0, 1[$. Si l'on choisit $\varepsilon < 1 - \ell$, il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$\sqrt[n]{u_n} - \ell < \varepsilon,$$

donc

$$\sqrt[n]{u_n} < (\ell + \varepsilon),$$

et finalement

$$0 \leq u_n < (\ell + \varepsilon)^n.$$

Mais $\ell + \varepsilon < 1$. La série de terme général $(\ell + \varepsilon)^n$ est donc une série géométrique convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

Supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers $\ell > 1$ (éventuellement infinie), ou tende vers 1^+ . Alors $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang, donc $u_n \geq 1$ à partir d'un certain rang, et la suite (u_n) ne peut converger vers 0. La série diverge donc.

21. On a

$$\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

ainsi que

$$\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p/(2p+1)} 2^{1/(2p+1)} = \exp \left[\frac{p}{2p+1} \ln \frac{2}{3} + \frac{\ln 2}{2p+1} \right].$$

Les suites $(\sqrt[2p]{u_{2p}})$ et $(\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}})$ des termes de rang pair et de rang impair extraites de la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ convergent donc toutes les deux vers $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Alors la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge aussi vers $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général u_n converge.

Par contre

$$\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = \frac{1}{3}.$$

Les suites des termes de rang pair et de rang impair extraites de la suite (u_{n+1}/u_n) ont des limites différentes. Elle n'a donc pas de limite, et on ne peut utiliser la règle de d'Alembert.

22. a) Les séries sont positives. On peut donc appliquer le théorème sur les équivalents.

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers zéro, et $(1 + u_n)$ vers 1, donc $v_n \sim u_n$. Les séries sont de même nature, donc la série de terme général v_n converge.

Inversement si la série de terme général v_n converge, la suite (v_n) converge vers zéro. Mais on obtient

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n},$$

et il en résulte que $u_n \sim v_n$. Les séries sont de même nature, donc la série de terme général u_n converge.

b) On a $0 \leq w_n \leq u_n$, donc si la série de terme général u_n converge, il en est de même de la série de terme général w_n . Mais la réciproque est fautive. Remarquons que si u_n tend vers l'infini, on a

$$w_n \sim \frac{1}{u_n}.$$

Il suffit de prendre $u_n = n^2$, pour que la série de terme général w_n converge mais pas celle de terme général u_n .

23. a) On constate que

$$\frac{P_k(n)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k-1 \\ \frac{1}{(n-k)!} & \text{si } n \geq k \end{cases},$$

donc

$$\sigma_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

b) Le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ est de degré 3. Les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 sont de degrés distincts et constituent une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut donc décomposer P dans cette base :

$$P(X) = \alpha X(X-1)(X-2) + \beta X(X-1) + \gamma X + \delta.$$

Le coefficient du terme de degré 3, vaut $\alpha = 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(0) &= 1 = \delta \\ P(1) &= 4 = \gamma + \delta \\ P(2) &= 15 = 2\beta + 2\gamma + \delta. \end{aligned}$$

On en déduit $\delta = 1$, $\gamma = 3$ et $\beta = 4$, donc

$$P(X) = P_0 + 3P_1 + 4P_2 + P_3.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} = \sigma_0 + 3\sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3 = 9e.$$

24. Puisque la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

donc en sommant

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Mais

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{n+1} - 1),$$

donc

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Si l'on veut avoir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 10^5,$$

il suffit que

$$2(\sqrt{n+1} - 1) > 10^5,$$

soit

$$\sqrt{n+1} > 5001,$$

et donc

$$n > (5001)^2 - 1.$$

La valeur $n = (5001)^2$ convient donc.

25. Soit k un entier naturel fixé. Comme $e^{\pi/2} - 1 \geq 3$, on a également

$$e^{2k\pi+\pi/2} - e^{2k\pi} = e^{2k\pi}(e^{\pi/2} - 1) \geq e^{\pi/2} - 1 \geq 3,$$

donc

$$\mathbb{E}(e^{2k\pi+\pi/2}) - \mathbb{E}(e^{2k\pi}) \geq (e^{2k\pi+\pi/2} - 1) - e^{2k\pi} \geq 2.$$

Alors, si l'on pose

$$r = \mathbb{E}(e^{2k\pi}),$$

on a $r \geq 1$, et il existe un entier $p \geq 2$ tel que

$$r + p = \mathbb{E}(e^{2k\pi+\pi/2}).$$

On a donc

$$r \leq e^{2k\pi} < r + 1 < r + p \leq e^{2k\pi+\pi/2} < r + p + 1,$$

et

$$\ln r \leq 2k\pi < \ln(r + 1) < \ln(r + p) \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \ln(r + p + 1).$$

On en déduit que si s est un entier compris entre $r + 1$ et $r + p$, le nombre $\cos \ln s$ est positif. On va minorer la somme

$$\sigma_k = \sum_{s=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln s}{s}.$$

Posons

$$t_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ \ln(r + j) - 2k\pi & \text{si } 1 \leq j \leq p \\ \pi/2 & \text{si } j = p + 1 \end{cases}$$

On a donc

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p \leq t_{p+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $0 \leq j \leq p$. Puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi/2]$, on a

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cos x \, dx \leq (t_{j+1} - t_j) \cos t_j.$$

Mais, on vérifie que

$$t_{j+1} - t_j \leq \ln(r + j + 1) - \ln(r + j).$$

En effet, il y a égalité si $1 \leq j \leq p - 1$, et, par ailleurs,

$$t_1 - t_0 = \ln(r + 1) - 2k\pi \leq \ln(r + 1) - \ln r,$$

et

$$t_{p+1} - t_p = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \ln(r + p) \leq \ln(r + p + 1) - \ln(r + p).$$

On peut alors utiliser le théorème des accroissements finis pour la fonction logarithme. Il existe c_j dans $[r + j, r + j + 1]$ tel que

$$\ln(r + j + 1) - \ln(r + j) = \frac{1}{c_j},$$

et donc

$$\ln(r + j + 1) - \ln(r + j) \leq \frac{1}{r + j}.$$

Finalement on en déduit

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cos x \, dx \leq \frac{\cos t_j}{r + j}.$$

Alors en sommant ces inégalités pour j variant de 0 à p ,

$$\sum_{j=0}^p \int_{t_j}^{t_{j+1}} \cos x \, dx \leq \sum_{j=0}^p \frac{\cos t_j}{r + j}.$$

Le membre de gauche vaut

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1.$$

Le membre de droite s'écrit

$$\sum_{j=0}^p \frac{\cos t_j}{r + j} = \frac{1}{r} + \sum_{j=1}^p \frac{\cos(\ln(r + j) - 2k\pi)}{r + j} = \frac{1}{r} + \sum_{j=1}^p \frac{\cos \ln(r + j)}{r + j},$$

on en déduit donc

$$\sum_{j=1}^p \frac{\cos \ln(r + j)}{r + j} \geq 1 - \frac{1}{r}.$$

Mais

$$\sum_{j=1}^p \frac{\cos \ln(r+j)}{r+j} = \sum_{s=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln s}{s} = \sigma_k ,$$

donc

$$\sigma_k \geq 1 - \frac{1}{E(e^{2k\pi})} .$$

Lorsque k tend vers l'infini, le membre de droite tend vers 1. Alors à partir d'un certain rang K , il est supérieur à $1/2$, et donc, si $k \geq K$, on

$$\sum_{j=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln s}{s} \geq \frac{1}{2} .$$

Soit maintenant un entier N . Comme $E(e^{2k\pi})$ tend vers l'infini, il existe un entier $k \geq K$ tel que

$$r = E(e^{2k\pi}) \geq N ,$$

et dans ce cas

$$\sum_{s=r+1}^{r+p} \frac{\cos \ln s}{s} \geq \frac{1}{2} .$$

La condition de Cauchy n'est pas satisfaite et la série de terme général $\frac{\ln \cos n}{n}$ diverge.

26. a) On a $u_n(0) = 1/n$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de terme général u_n ne converge pas simplement, donc elle ne converge ni uniformément, ni normalement.

b) Posons

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1+x} .$$

On a donc

$$u_n(x) = (-1)^n f(nx) .$$

Pour $x = 0$, on a $u_n(x) = 0$ et la série de terme général $u_n(0)$ converge. Pour $x \neq 0$, on va utiliser le critère de Leibniz. Tout d'abord,

$$|u_n(x)| \sim \frac{\pi}{2nx} ,$$

ce qui montre que la suite (u_n) converge vers 0, et aussi que la série de terme général u_n ne converge pas absolument. Il reste à montrer que, pour x fixé, la suite $(|u_n(x)|)$ est monotone à partir d'un certain rang. Cela revient à étudier les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$. On a tout d'abord

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{1+x}{1+x^2} - \arctan x \right) ,$$

et, si l'on note,

$$g(x) = \frac{1+x}{1+x^2} - \arctan x ,$$

les fonctions g et f' ont le même signe. En dérivant g on trouve

$$g'(x) = \frac{(1+x^2) - (1+x)(2x)}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -2 \frac{x+x^2}{(1+x^2)^2} < 0 .$$

On en déduit que g est décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2},$$

la fonction g s'annule une fois et une seule pour une valeur α , et elle est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, +\infty[$. Il en est de même de f' . Alors f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. Si x est fixé, et si $n > \alpha/x$, la suite $(f(nx))$ est alors décroissante et il résulte du critère de Leibniz que la série de terme général $u_n(x)$ converge.

En résumé, la série de terme général u_n converge simplement sur $[0, 1]$.

Enfin, on constate que

$$|u_n(1/n)| = \frac{\arctan 1}{2} = \frac{\pi}{8},$$

et donc la suite $(u_n(1/n))$ ne converge pas vers 0. Il en résulte que la suite (u_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1]$. On en conclut que la série de terme général u_n ne converge pas uniformément. Elle ne converge donc pas non plus normalement.

c) On a tout d'abord

$$|u_n(0)| \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et la série de terme général $|u_n(0)|$ diverge, donc la série de terme général u_n ne converge pas absolument. Par contre puisque, quel que soit x dans $[0, 1]$ la suite $(1/(nx + \sqrt{n}))$ décroît et converge vers 0, le critère de Leibniz montre que la série de terme général u_n converge simplement.

Etudions la convergence uniforme. Pour une série alternée, on a

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)x + \sqrt{n+1}},$$

et donc, puisque la fonction $|u_{n+1}|$ est décroissante,

$$\|R_n(x)\|_{\infty} \leq |u_{n+1}(0)| = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

Il en résulte que la suite (R_n) converge uniformément vers 0, donc que la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0, 1]$. Par contre

$$\|u_n\|_{\infty} = |u_n(0)| = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et donc la série de terme général $\|u_n\|_{\infty}$ diverge. La série de terme général u_n ne converge pas normalement.

d) La série de terme général u_n converge simplement et on peut calculer la somme S .

Si $x = 1$, on a $u_n(x) = 0$, donc $S(x) = 0$.

Si $x \in [0, 1[$, on obtient

$$S(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1.$$

On constate que la somme S n'est pas continue, alors que les fonctions u_n étaient continues. La convergence ne peut donc être ni uniforme, ni normale.

e) D'après d), la convergence de la série de terme général u_n est absolue. On calcule sa somme. Pour tout $x \in [0, 1[$ on a

$$S(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1-x}{1+x},$$

ce qui reste vrai si $x = 1$, car alors $u_n(x) = 0$. On a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x) = (-1)^{n+1} x^{n+1} \frac{1-x}{1+x},$$

Alors

$$|R_n(x)| = \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{1+x} \leq x^{n+1} - x^{n+2}.$$

Posons

$$g_n(x) = x^{n+1} - x^{n+2} = x^{n+1}(1-x).$$

En dérivant

$$g'_n(x) = (n+1)x^n - (n+2)x^{n+1} = x^n((n+1) - (n+2)x).$$

Le maximum de g_n est obtenu pour $x_n = \frac{n+1}{n+2}$, et l'on a

$$g_n(x_n) = x_n^{n+1} \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit donc que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2},$$

ce qui montre que la série de terme général u_n converge uniformément. Par contre elle ne converge pas normalement, d'après le d).

f) On a

$$|u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^2},$$

donc la série de terme général u_n converge normalement. Il en résulte qu'elle converge aussi uniformément, absolument et simplement sur $[0, 1]$.

27. a) Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ et la série de terme général $f_n(0)$ a une somme $f(0)$ qui est nulle.

Supposons $x > 0$. Alors on a une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$ et sa somme $f(x)$ vaut

$$f(x) = \frac{x^a}{1 - e^{-x}}.$$

b) On calcule

$$f'_n(x) = ax^{a-1}e^{-nx} - nx^a e^{-nx} = (a - nx)x^{a-1}e^{-nx}.$$

La fonction f_n a un maximum pour $x = a/n$, et

$$\|f_n\|_\infty = f_n(a/n) = \frac{a^a e^{-a}}{n^a}.$$

La série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge si et seulement si $a > 1$ par comparaison à une série de Riemann, donc la série de terme général u_n converge normalement si et seulement si $a > 1$.

c) Si $0 < a < 1$, et si $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} x^{a-1},$$

et puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1,$$

on en déduit que, en 0,

$$f(x) \sim x^{a-1}.$$

Alors, $f(x)$ ne tend pas vers $f(0)$ lorsque x tend vers 0. Puisque les fonctions f_n sont continues et que f ne l'est pas, la convergence n'est pas uniforme.

d) Soit $n \geq a/s$. Alors la fonction f_n est décroissante sur $[s, +\infty[$, et donc

$$\sup_{x \geq s} |f_n(x)| = f_n(s) = s^a e^{-ns},$$

et comme la série numérique de terme général $f_n(s)$ converge, il en résulte que la série de terme général f_n converge normalement donc uniformément sur $[s, +\infty[$.

28. Calculons la dérivée d'ordre k de u_n . On obtient facilement par récurrence que

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^2} \frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

La fonction qui à x associe $1/(x+n)^k$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et atteint son maximum en 0, donc

$$\|u_n^{(k)}\|_\infty = \frac{k!}{n^{k+3}}.$$

Alors toutes ces séries convergent normalement, donc uniformément et il en résulte que la somme de la série de terme général u_n est une fonction indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$.

29. On écrit

$$f_n(x) = \frac{\sin(x + n + n\pi)}{x + n},$$

et on utilise le critère d'Abel de convergence uniforme.

Posons

$$v_n(x) = \frac{1}{x + n} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \sin(x + n(1 + \pi)).$$

On a

$$\|v_n\|_\infty = \frac{1}{n},$$

et la suite (v_n) converge uniformément vers 0.

Par ailleurs,

$$\sum_{k=n}^m e^{(x+k(1+\pi))i} = e^{(x+n(1+\pi))i} \sum_{k=0}^{m-n} e^{k(1+\pi)i} = e^{(x+n(1+\pi))i} \frac{1 - e^{(m-n+1)(1+\pi)i}}{1 - e^{(1+\pi)i}}.$$

Alors

$$\left| \sum_{k=n}^m e^{(x+k(1+\pi))i} \right| = \frac{|1 - e^{(m-n+1)(1+\pi)i}|}{|1 - e^{(1+\pi)i}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{(1+\pi)i}|},$$

donc

$$\left| \sum_{k=n}^m \sin(x + k(1 + \pi))i \right| \leq \left| \sum_{k=n}^m e^{(x+k(1+\pi))i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{(1+\pi)i}|} = M.$$

Les sommes sont bornées par un nombre M qui ne dépend ni de n , ni de m , ni de x .

Il résulte alors du critère d'Abel que la série de terme général u_n converge normalement sur $[0, +\infty[$.

30. a) D'après le procédé télescopique

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k(x) = u_1(x) - u_{n+1}(x),$$

et la suite $(u_{n+1}(x))$ converge vers 0 (en distinguant les cas $x = 0$ et $x > 0$), donc la série de terme général u_n converge simplement, et

$$S(x) = u_1(x).$$

b) Puisque u_n est la dérivée de la fonction qui à x associe $e^{-n^2 x^2}$, on a

$$\int_0^a u_n(t) dt = \left[e^{-n^2 x^2} \right]_0^a = e^{-n^2 a^2} - 1.$$

Alors

$$w_n = \int_0^a u_n(t) dt - \int_0^a u_{n+1}(t) dt = e^{-n^2 a^2} - e^{-(n+1)^2 a^2},$$

et d'après le procédé télescopique

$$\sum_{k=1}^n w_k = e^{-a^2} - e^{-(n+1)^2 a^2},$$

donc, lorsque n tend vers l'infini, cette somme a une limite qui vaut

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = e^{-a^2}.$$

c) On a

$$\int_0^a S(t) dt = \int_0^a u_1(x) dx = e^{-a^2} - 1.$$

d) On constate que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a u_n(x) dx \neq \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx.$$

La convergence de la série de terme général u_n ne peut donc être uniforme.